

Unidad 5 Semejanza y trigonometría

FICHA DE

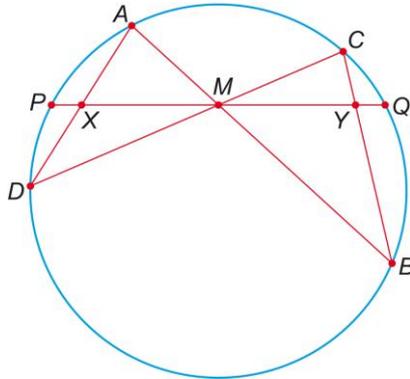
PROFUNDIZACIÓN



Teorema de la mariposa

Un gran número de resultados geométricos que se han obtenido o demostrado gracias a la semejanza de triángulos. Uno de estos resultados que resalta por su belleza geométrica es el denominado teorema de la mariposa.

Sea M el punto medio de una cuerda PQ de una circunferencia. Por M se trazan otras dos cuerdas AB y CD . La cuerda AD corta a la cuerda PQ en un punto X y la cuerda BC corta a la cuerda PQ en un punto Y . Entonces, el punto M es también el punto medio de XY .

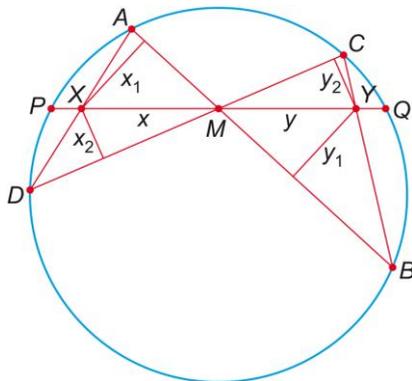


Este teorema se puede demostrar de distintas formas. Vamos a mostrar la que realizaron Coxeter y Greitzer mediante semejanza de triángulos.

Sean x_1 y x_2 los segmentos perpendiculares a AB y a CD desde X .

Sean y_1 y y_2 a los segmentos perpendiculares AB y CD desde Y .

Sea $a = MP = MQ$, $x = MX$ e $y = MY$.



- El triángulo de vértice M y lado x_1 es semejante al triángulo de vértice M y lado y_1 : son triángulos rectángulos con ángulos agudos iguales por ser opuestos por el vértice.

Luego $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$. Y análogamente se tiene que $\frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2}$.

- El triángulo de vértice A y lado x_1 es semejante al triángulo de vértice C y lado y_2 : son triángulos rectángulos con ángulos agudos iguales en A y en C por abarcar el mismo arco de circunferencia.

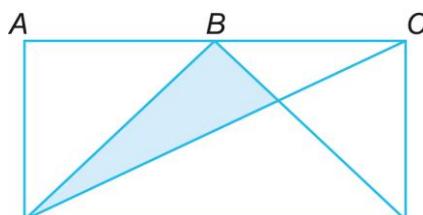
Luego $\frac{x_1}{y_2} = \frac{AX}{CY}$. Y análogamente se tiene que $\frac{x_2}{y_1} = \frac{XD}{YB}$.

Por tanto, se tiene:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1 \cdot x_2}{y_1 \cdot y_2} = \frac{AX \cdot XD}{CY \cdot YB} \stackrel{\substack{\text{Teorema de} \\ \text{la potencia} \\ \text{de un punto}}}{=} \frac{PX \cdot XQ}{PY \cdot YQ} = \frac{(a-x) \cdot (a+x)}{(a-y) \cdot (a+y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}$$

Entonces, $\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2} \Rightarrow a^2 x^2 - x^2 y^2 = a^2 y^2 - x^2 y^2 \Rightarrow a^2 x^2 = a^2 y^2 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.

1. Sabiendo que B es el punto medio de AC y que el rectángulo es de base 2 cm y altura 1 cm, calcular el área del triángulo sombreado.



MATERIAL FOTOCOPIABLE

