To be or not to be

En la antigüedad, el concepto de número surgió como consecuencia de la necesidad práctica de contar objetos. Inicialmente se contaban con ayuda de los medios disponibles: dedos, piedras... (basta recordar, por ejemplo, que la palabra cálculo deriva de la palabra latina *calculus,* que significa 'contar con piedras'). La serie de números naturales era, obviamente, limitada; pero la conciencia sobre la necesidad de ampliar el conjunto de números representaba ya una importante etapa en el camino hacia la matemática moderna. Paralelamente a la ampliación de los números, se desarrollaron su simbología y los sistemas de numeración diferentes para cada civilización.

Fue en la India –entre los siglos V y XII d.C.– donde se empezaron a usar correctamente los números negativos, se introdujo el cero y se llegó incluso a aceptar como números válidos los números irracionales. Es indiscutible la procedencia hindú del sistema de numeración decimal y de las reglas de cálculo.

El cero, ¿es o no un número natural?

Giuseppe Peano
(Italia, 1858-1932)

Este es uno de los temas de más frecuente discusión entre aquellas personas dedicadas a las matemáticas. Cuando Peano (Italia, 1858-1932) introdujo los axiomas para definir el conjunto de los números naturales, inició este conjunto por el número uno. Pero cuando Cantor (Rusia, 1845-1918) estudió la teoría de conjuntos, acostumbraba empezar por el cero, dada la necesidad de asignarle un cardinal al conjunto vacío. Quizá fue esto lo que hizo que, diez años más tarde, Peano empezara los números naturales con el cero.

En las últimas décadas ha sido muy popular la teoría de conjuntos, lo cual justifica por qué muchos profesores consideran mejor empezar el conjunto de los naturales por el cero.

En este texto se elige empezar el conjunto de los números naturales por el cero, pues es necesario para el cardinal del conjunto vacío, para el neutro de la suma y para tantas otras aplicaciones.

Pero en algunos temas, como en las sucesiones, se indicará como $\mathbb{N}^*$ a los naturales sin el cero, pues es mucho más lógico relacionar el primer término con el número uno, el segundo término con el número dos y así sucesivamente, y recordar, a la vez, que no hay un ordinal para el cardinal cero.

Georg Cantor
(Rusia, 1854-1918)

14

NOCIONES SOBRE SUCESIONES

1 – DEFINICIÓN

Se denomina *sucesión* a una función **f** cuyo dominio es el conjunto de todos los números naturales excepto el cero.

Dado que la variable es un número natural, se acostumbra a usar la letra **n**, en lugar de **x**.

Generalmente, la dependencia de **n** se indica utilizando subíndices y se escribe a_n, b_n, s_n, en vez de **f(n)**, **g(n)** ...

De esta manera se obtiene la siguiente correspondencia:

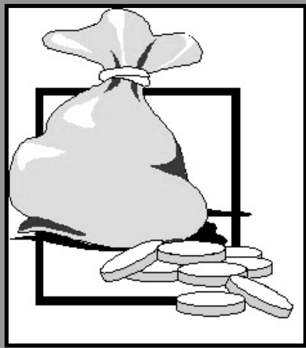
$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & \ldots & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & \ldots & \ldots & a_n & \ldots \end{array}$$

$\{a_n\}$ vs. a_n

Se utiliza la notación:

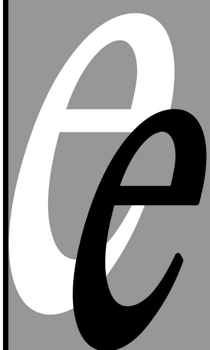
$\{a_n\}$ para indicar la sucesión cuyo término enésimo es a_n.

EL AVARO Y EL MENDIGO



Un mendigo le pide hospedaje a un avaro haciéndole la siguiente proposición: "yo pagaré \$1000 por el primer día, \$2000 por el segundo, \$3000 por el tercero y así sucesivamente. A cambio, usted me pagará \$1 el primer día, \$2 el segundo, \$4 el tercero y así sucesivamente".
El avaro y el mendigo llegaron a un acuerdo por 30 días.
¿Quién salió perjudicado en este contrato y por qué?

UN NÚMERO MUY IMPORTANTE



Trabajando con la sucesión:

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Calcular:

f(100) =
f(1000) =
f(10000) =

¿Qué se observa?
¿A qué número tiende?
Preguntar al profesor: ¿cómo se llama este número?

Véase el resultado en la página 393.

2 – ALGUNAS FORMAS DE DEFINIR UNA SUCESIÓN

Por una fórmula explícita.

Por ejemplo: $\{a_n\}: a_n = \frac{1}{n}$. Esta fórmula recibe el nombre de *término general* de la sucesión, pues a partir de ella es posible encontrar cualquiera de los términos de $\{a_n\}$.

EJEMPLO: Determinar el término general de la siguiente sucesión a partir de sus primeros términos: $\{a_n\} = \{1, 3, 9, 27, 81, ...\}$

El estudiante debe reconocer en estos números, las primeras potencias de 3.

$$\{a_n\}: a_n = 3^{n-1} \quad \forall\ n \geq 1$$

Por una ley de recurrencia.

Fórmula que relaciona un término cualquiera, los anteriores y el lugar que ocupa.

El principal inconveniente de esta forma de expresar una sucesión está en la necesidad de conocer un término para hallar el siguiente.

EJEMPLO:

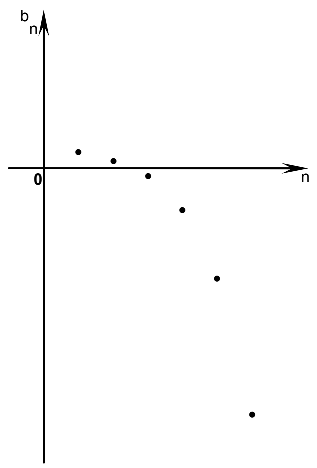
En la siguiente sucesión dada por recurrencia: $\{b_n\}: \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = 2b_n - 3 \quad \forall\ n \geq 1 \end{cases}$

i) Calcular los diez primeros términos. *ii)* Graficarlos.

iii) Encontrar una fórmula explícita para $\mathbf{b_n}$ en función de **n.**

i) $\{b_n\} = \{2, 1, -1, -5, -13, -29, -61, -125, -253, -509, ...\}$

ii)



iii) En algunos casos, es posible encontrar una formula explícita para $\mathbf{b_n}$ en función de **n.**

$$\{b_n\}: b_n = 3 - 2^{n-1} \quad \forall\ n \geq 1$$

3 – SUCESIONES CRECIENTES O DECRECIENTES

Una sucesión se dice que es *estrictamente creciente* si cada término es mayor que el anterior.

$\{a_n\}$ es estrictamente creciente si para todo **n**$\in\mathbb{N}^*$ $\quad a_{n+1} > a_n$

Una sucesión se dice que es *estrictamente decreciente* si cada término es menor que el anterior.

$\{a_n\}$ es estrictamente decreciente si para todo **n**$\in\mathbb{N}^*$ $\quad a_{n+1} < a_n$

Una sucesión $\{a_n\}$ se llama *monótona creciente* si para todo **n**$\in\mathbb{N}^*$ $\quad a_{n+1} \geq a_n$

Una sucesión $\{a_n\}$ se llama *monótona decreciente* si para todo **n**$\in\mathbb{N}^*$ $\quad a_{n+1} \leq a_n$

Una sucesión $\{a_n\}$ se llama *constante* si para todo **n**$\in\mathbb{N}^*$ $\quad a_{n+1} = a_n$

Mientras que $\{a_n\}$: $a_n = \operatorname{sen} n$ es *oscilante* pues sus valores varían entre $+1$ y -1

EJEMPLO: Demostrar que: $\{a_n\}$: $a_n = \dfrac{1}{n}$ es una sucesión decreciente.

Para ello se debe demostrar que: para todo $n\in\mathbb{N}^*$ $\quad a_{n+1} < a_n$

O sea que: $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ o, lo que es lo mismo: $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} < 0$ al buscar un común denominador: $\dfrac{-1}{n(n+1)} < 0$

se confirma que la sucesión es decreciente, pues la desigualdad indicada se verifica para todos los $\mathbb{N}^*$.

4 – LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Para calcular el término 15 de una sucesión basta sustituir la **n** por 15 y hacer las cuentas indicadas.

Pero un dato muy importante que se necesita conocer es el comportamiento de los términos de una sucesión indefinida.

En todos los casos habrá que preguntarse: ¿qué sucede con los términos de la sucesión cuando $\mathbf{n \to +\infty}$?

$$n \to +\infty$$

Es tan importante el concepto:

¿Qué le pasa a a_n cuando $n \to +\infty$?

que comúnmente no se escribe la tendencia, sino solamente:

$$\lim a_n = b$$

e incluso suele llegar a verse tan solo:

$$a_n \to b$$