CUADERNO PROBABILIDAD TEORÍA Y EJERCICIOS

- **Uno de los objetivos de la estadística es tratar de sacar conclusiones sobre las características de una variable en una población (a la que no podemos acceder completamente) a partir de una muestra. → Inferencia**

  Ejemplo: Para conocer la intención de voto de un país, utilizo la información de la intención de voto de un conjunto de individuos entrevistados al azar.

- **Como al hacer inferencia no conocemos exactamente cuál va a ser exactamente el comportamiento en la población, siempre existirá <u>incertidumbre</u>.**

- **Para poder "manejar" esa incertidumbre y hacer inferencia necesitaremos utilizar la idea de modelo probabilístico, de <u>Probabilidad</u>.**

- **La <u>probabilidad</u> es la disciplina que se encarga del estudio, descripción y modelización de los fenómenos o experimentos aleatorios.**

- **En un <u>experimento aleatorio</u> el resultado depende del azar y está caracterizado por:**

  - **todos sus posibles resultados se conocen con anterioridad**

  - **no se puede predecir su resultado**

  - **puede repetirse en condiciones idénticas**

  Ejemplos: tirar una moneda, tirar un dado.

- **<u>Espacio muestral</u>: es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.**

  Lanzar moneda: *E*={C,X}

  Lanzar un dado: *E*={1,2,3,4,5,6}

  Lanzar dos veces una moneda: *E*={CC,CX,XC,XX}

  Lanzar dos monedas iguales: *E*={CC,CX,XX}

  ¿Lanzar 2 veces un dado? → Ejemplo 13.3 Peña y Romo

- **<u>Suceso o suceso aleatorio</u>: es cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, cualquier resultado o conjunto de resultados de un experimento aleatorio.**

  <u>Ejemplos</u>:

  - **En el experimento lanzar un dado *E*={1,2,3,4,5,6} el suceso "sale un número par" es *A*={2,4,6}.**
  - **En el experimento lanzar dos veces una moneda: *E*={CC,CX,XC,XX}:**

    + el suceso "sale al menos una cara" es *A*={CC,CX,XC}

    +el suceso "no sale cruz" es *B*={CC}→es un suceso elemental porque sólo tiene un elemento.

- **Al espacio muestral *E* se le llama suceso seguro porque siempre ocurre. Al conjunto vacío sin elementos se le llama suceso imposible.**

- **Al suceso "no ocurre A" se le llama suceso contrario o complementario de A y lo forman todos los resultados que no pertenecen a A:**

  Ejemplo:

  - **En el experimento lanzar un dado *E*={1,2,3,4,5,6} el suceso *A* "sale un número par" es *A*={2,4,6} y el "suceso contrario de *A*" será {1,3,5}, es decir, "sale un número impar".**

- **Dados dos sucesos *A* y *B* tendremos:**
  - **suceso "*A* y *B*" o $A \cap B$: si ocurren los dos a la vez**
  - **suceso "*A* o *B*" o $A \cup B$: si ocurre al menos uno de los dos**
  - **son sucesos incompatibles si es imposible que ocurran a la vez: "*A* y *B*"= $A \cap B = \varnothing$.**

<u>Ejemplos</u>:

En el experimento lanzar un dado *E*={1,2,3,4,5,6}:

- **"sale un número par" es *A*={2,4,6}**
- **"sale un número mayor que 3" es *B*={4,5,6}**
- **"sale un número impar" es *C*={1,3,5}**

- **"*A* y *B*"={4,6}**

- **"*A* o *B*"={2,4,5,6}**

- **"*A* y *C*" es imposible luego *A* y *C* son sucesos incompatibles.**

Ver Figura 13.2 de Peña y Romo

- **¿Cómo asignamos probabilidades a los sucesos? Por ejemplo, si lanzamos un dado ¿cuál es la probabilidad de que salga un número par? → a partir de las características del experimento.**

- **Vamos a ver cómo se hace en el caso más sencillo, el de <u>espacios equiprobables</u>. Se dice que un experimento aleatorio es equiprobable si todos sus resultados tienen la misma probabilidad de aparecer. En este caso:**

Regla de Laplace: $P(A) = \dfrac{elementos\ A}{elementos\ E} = \dfrac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$

<u>Ejemplo</u>: Experimento lanzar un dado

Espacio muestral *E*={1,2,3,4,5,6}

Suceso "sale par" *A*={2,4,6} luego:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: Experimento lanzar dos veces una moneda

Espacio muestral *E*={CC,CX,XC,XX}

- **Suceso "sale al menos una cara" *A*={CC,CX,XC} luego:**

  $$P(A)=\frac{3}{4}$$

- **Suceso "salen dos cruces" *B*={XX } luego:** $P(B)=\frac{1}{4}$

- **Suceso "*A* o *B*"= *E*={CC,CX,XC,XX} luego:**

  $P(A\;o\;B)=P(E)=1$

- **Suceso "*A* y *B*"={$\emptyset$} luego:** $P(A\;y\;B)=P(\emptyset)=0$

- **Propiedades de la probabilidad:**

  - Dado un suceso cualquiera *A* se cumple: $0\leq P(A)\leq 1$

  - $P(\emptyset)=0$

  - $P(E)=1$**: la probabilidad del espacio muestral (suceso seguro) es 1**

  - Si *A* y *B* son dos sucesos cualesquiera (no incompatibles) se cumple que:

  $$P(A\;o\;B)=P(A)+P(B)-P(A\;y\;B)$$

- Si *A* y *B* son sucesos incompatibles se cumple que:

$$P(A\,o\,B) = P(A) + P(B)$$

-A partir de aquí, como los sucesos *A* y "no *A*" son incompatibles, y como el suceso "*A* o no *A*" es el espacio muestral,

$$P(A\,o\;\;no\,A) = P(A) + P(noA) = P(E) = 1$$

se obtiene que:

$$P(A) = 1 - P(noA)$$

Probabilidad condicionada

- **La probabilidad de que ocurra un suceso *A* si sabemos que ha ocurrido un suceso *B* es:**

$$P(A|B) = \frac{P(A\ y\ B)}{P(B)}$$

Ejemplo:

Se lanza dos veces una moneda: *E*={CC,CX,XC,XX}. Sabemos que ha ocurrido el suceso "sale al menos una cara", es decir, *B*={CC,CX,XC}

La probabilidad de que ocurra el suceso *A* "en el primer lanzamiento sale cara"={CC,CX} condicionada por el suceso *B* será:

$$P(A|B) = \frac{P(A\ y\ B)}{P(B)} = \frac{2/4}{3/4} = 2/3$$

ya que "*A* y *B*"={CC,CX}.

La probabilidad de *A* que es 1/2 se transforma en 2/3 al incorporar la información de que sale al menos una cara.

Ejercicio 14.1 (de Peña y Romo)

Se lanza dos veces un dado. Se sabe que en el primer lanzamiento ha salido un tres.

a) **Hallar la probabilidad de que la suma de los dos resultados sea 8, empleando la definición de probabilidad condicionada.**

   Al lanzar dos veces un dado el espacio muestral tendrá 36 elementos y será:

   E={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)

   (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)

   (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)

   (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)

   (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)

   (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

Llamamos *A*=”el primer y el segundo resultado suman 8” y *B*=”el primer resultado es un tres”, luego nos piden:

$$P(A|B) = \frac{P(A\ y\ B)}{P(B)}$$

Tendremos entonces:

***A*={(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)} con** P(A)=

***B*={(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)} con** P(B)=

***A y B*={(3,5)} con** P(AyB)=

Por tanto: P(A/B)=

b) Considerar el suceso *B*="en el primer lanzamiento ha salido un tres" como el nuevo espacio muestral y calcular la probabilidad de que "ambos resultados sumen ocho".

Nuevo espacio muestral {(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)}

***A*="ambos resultados suman ocho"={(3,5)} luego** P(A)=

- **A partir de la fórmula de la probabilidad condicionada se obtiene una expresión para obtener la probabilidad de que ocurran dos sucesos *A* y *B*:**

$$P(A\ y\ B) = P\left(A \middle| B\right)P(B)$$

<u>Ejemplo</u>:

Suceso *A*: perder las maletas

Suceso *B*: viajar con Iberia

¿Cuál es la $P(A\ y\ B)$ si sabemos que el 30% de los viajeros vuelan con Iberia ($P(B) = 0{,}3$) y que Iberia pierde la maleta del 0,1% de sus pasajeros ($P\left(A \middle| B\right) = 0{,}001$)?

$$P(A\ y\ B) = P\left(A \middle| B\right)P(B) = 0{,}001 \times 0{,}3 = 0{,}0003$$

Ejercicio 14.6 (de Peña y Romo)

Las 40 cartas de una baraja se agrupan en 4 palos (oros (O), copas (C), espadas (E) y bastos (B)) y están numeradas del 1 al 10. Se elige primero una carta y luego otra sin haber devuelto la primera al mazo.

a) Utilizar la regla de la multiplicación para hallar la probabilidad de que ambas sean oros.

P(O y O)=

b) Calcular la probabilidad de que salgan dos ases.

P(1 y 1)=

<u>Ejercicio 14.3</u>

La regla de la multiplicación también se verifica para más de 2 sucesos. En el caso de tres sucesos *A*, *B* y *C*, se cumple que:

$$P(A\ y\ B\ y\ C) = P\left(A \middle| B\ y\ C\right) P(B|C) P(C)$$

En el ejemplo de Iberia, supongamos que la compañía recupera en menos de una semana el 80% del equipaje perdido. Hallar la probabilidad de que se pierda el equipaje de una persona que viaja con Iberia y que se recupere en menos de una semana.

Recordemos que:

Suceso *A*: perder las maletas

Suceso *B*: viajar con Iberia ($P(B) = 0{,}3$**) y que** $P\left(A \middle| B\right) = 0{,}001$

Llamamos:

Suceso C: recuperar el equipaje en menos de una semana y sabemos que $P\left(C \middle| A\ y\ B\right) = 0{,}8$**. Nos piden:**

P(C y A y B)=

Probabilidad total

- **En ocasiones el espacio muestral *E* se puede dividir en varios sucesos B_1, B_2, …, B_r que son incompatibles entre sí, de modo que siempre que se realice el experimento saldrá uno de ellos.**

- **En esta situación, la probabilidad de un suceso cualquiera *A* puede calcularse empleando la fórmula de la probabilidad total:**

$$P(A) = \sum_{i=1}^{r} P\left(A \middle| B_i\right) P(B_i)$$

Ejemplo:

En una economía hay 4 sectores B_1, B_2, B_3 y B_4.

Sea el suceso S "estar en paro". La probabilidad de que una persona esté en paro en cada uno de los sectores será:

$$P(S|B_1) = 0{,}05 \quad P(S|B_2) = 0{,}01 \quad P(S|B_3) = 0{,}02 \quad P(S|B_4) = 0{,}1$$

De los trabajadores de esa economía la mitad pertenecen a B_1 y el resto se reparten por igual entre los otros tres, es decir:

$$P(B_1) = 0{,}5 \quad P(B_2) = 0{,}16 \quad P(B_3) = 0{,}16 \quad P(B_4) = 0{,}16$$

La probabilidad de estar en paro de una persona escogida al azar será:

$$P(S) = \sum_{i=1}^{4} P(S|B_i)P(B_i) =$$
$$= 0{,}05 \times 0{,}5 + 0{,}01 \times 0{,}16 + 0{,}02 \times 0{,}16 + 0{,}1 \times 0{,}16 = 0{,}458$$

Regla de Bayes

- **Siguiendo con el ejemplo anterior, dada una persona que está en paro, ¿qué probabilidad hay de que sea de un cierto sector B_i? Es decir buscamos** $P\left(B_i \middle| S\right)$.

- **Según la definición de probabilidad condicionada será:**

$$P\left(B_i \middle| S\right) = \frac{P(B_i \ y\ S)}{P(S)}$$

- **Si en el numerador aplicamos la expresión de la probabilidad conjunta y en el denominador la de la probabilidad total obtenemos la <u>regla de Bayes</u>:**

$$P\left(B_i \middle| S\right) = \frac{P(S|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{r} P(S|B_j)P(B_j)}$$

Ejercicio:

Continuando con el ejemplo anterior:

¿Cuál es la probabilidad de que una persona que esté en paro pertenezca al sector 1, es decir, $P(B_1|S)$**?**

$P(B_1|S) =$

Independencia

- **Dos sucesos son independientes cuando el que ocurra uno de ellos no modifica la probabilidad de que ocurra el otro. Formalmente, dos sucesos *A* y *B* son independientes si:**

$$P(A|B) = P(A)$$

que también puede expresarse:

$$P(A\ y\ B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$$

<u>Ejemplo</u>:

Se lanza una moneda dos veces *E*={CC,CX,XC,XX}

Suceso *A* "la primera sale cara"= {CC,CX} $\rightarrow\ P(A)=1/2$

Suceso *B* "la segunda sale cara"= {CC,XC} $\rightarrow\ P(B)=1/2$

***P(A* y *B)*=**

Se cumple que $P(A\ y\ B)=P(A)P(B)$ $\rightarrow$ ***A* y *B* son sucesos independientes**

Ejercicio 14.4

Se lanza una moneda. Si sale cara se elige al azar una bola de una urna con bolas numeradas del 1 al 4. Si sale cruz se elige al azar una bola de una urna con bolas numeradas del 1 al 6.

a) Obtener, mediante un diagrama de árbol, todos los posibles resultados del experimento.

Se lanza una moneda:

Diagrama=

b) Utilizar la regla de la multiplicación para calcular las probabilidades de cada uno de los resultados del experimento. ¿Es equiprobable?

P(Cy1)=

P(Cy2)=

P(Cy3)=

P(Cy4)=

P(x y 1)=

P(X y 2)=

P(X y 3)=

P(X y 4)=

P(X y 5)=

P(X y 6)=

¿es equiprobable?

c) Hallar la probabilidad de que al extraer una bola de la urna salga un 4.

Aplicando la fórmula de la probabilidad total de un suceso A: $P(A) = \sum_{i=1}^{r} P\left(A \middle| B_i\right) P(B_i)$ **tendremos que la probabilidad de que salga un 4 será:**

P(4)=

d) Dado que ha salido un 3, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido cara al lanzar la moneda? ¿y si ha salido un 6?

Aplicando la regla de Bayes:

$$P\left(B_i \middle| S\right) = \frac{P(B_i \ y \ S)}{P(S)} = \frac{P(S|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{r} P(S|B_j)P(B_j)}$$

tendremos:

P(C/3)=

y:

P(C/6)=

Ejercicio 14.9

El 42% de la población activa de un país está formada por mujeres. Se sabe que el 24% de las mujeres y el 16% de los hombres está en paro.

a) **Hallar la probabilidad de que una persona, elegida al azar, esté en paro. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga trabajo?**

Sabemos que:

$P(ser\ mujer) = P(M) = 0{,}42$

$P(ser\ \text{hom}bre) = P(H) = 1 - P(M) = 0{,}58$

$P(parado | M) = 0{,}24$ **y** $P(parado | H) = 0{,}16$

Aplicando la fórmula de la probabilidad total tendremos: P(parado)=

Por lo tanto P(trabajar)=

b) Calcular, utilizando el teorema de Bayes, la probabilidad de que una persona en paro elegida al azar sea hombre.

P(H/parado)= P(parado y H) / P(parado)=

Ejercicio 14.10

El 10% de las personas de una población padecen una enfermedad. Para detectarla se hace una prueba que da positivo el 95% de las veces que se hace a alguien que padece la enfermedad. El 1% de los pacientes sanos también da positivo en la prueba.

Es decir:

$P(padecer) = 0{,}1$

$P(no\ padecer) = P(sano) = 1 - P(padecer) = 0{,}9$

$P(positivo | padecer) = 0{,}95$ **y** $P(positivo | sano) = 0{,}01$

a) **Obtener la probabilidad de que la prueba clasifique a una persona como enferma.**

   Aplicando la fórmula de la probabilidad total tendremos: P(positivo)=

b) **¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté realmente enferma si la prueba ha dado positiva?**

   Utilizando el teorema de Bayes:

P(padecer/positivo)=

c) **Hallar la probabilidad de que una persona esté sana si la prueba da positivo.**

P(sano/positivo)=1-P(padecer/positivo)=

Ejercicio 14.2

Supongamos que la probabilidad de que los hijos de una pareja sean varón o hembra es la misma. Sea *A* el suceso "como mucho tienen un varón" y *B* el suceso "los hijos son de ambos sexos".

a) Si la pareja tiene dos hijos, hallar la probabilidad de *A*, de *B* y de "*A y B*". ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*?

Si la pareja tiene dos hijos, el espacio muestral será:

***E*={VV,VH,HV,HH}**

El suceso *A*="como mucho un varón"={VH,HV,HH} tendrá una probabilidad P(A)=

El suceso *B*="ambos sexos"={VH,HV} tendrá una probabilidad P(B)=

El suceso *"A y B"*={VH,HV} tendrá una probabilidad P(A y B)=

Los sucesos *A* y *B* ¿son independientes?

b) Si la pareja tiene tres hijos responder a las mismas preguntas del apartado anterior.

Si la pareja tiene tres hijos, el espacio muestral será:

***E*={VVV,VVH,VHV,HVV,HHV,HVH,VHH,HHH}**

El suceso *A*=”como mucho un varón”= ={HHV,HVH,VHH,HHH}, tendrá una probabilidad P(A)=

El suceso *B*=”ambos sexos”= ={VVH,VHV,HVV,HHV,HVH,VHH} tendrá una probabilidad P(B)=

El suceso *“A y B”*={HHV,HVH,VHH} tendrá una probabilidad P(Ay B)=

Los sucesos *A* y *B* ¿son independientes?